TEMA 9: ESPACIO AFÍN

Definición (Espacio afín)

(A, V, φ) es un espacio afín si:

i) $A \neq \emptyset$ A es un conjunto de puntos

ii) V es un K-espacio vectorial de dimensión finita ($\dim A \overset{def}{=} \dim V$)

iii) $\varphi : A \times A \longrightarrow V$ ($\underbrace{\varphi(p,q)}_{\overrightarrow{pq}} \in V$, $\forall p,q \in A$) $\varphi(p,q) = \overrightarrow{pq}$ es el vector que va de p a q

iv) $\varphi(p,q) = \varphi(p,r) + \varphi(r,q)$

v) $\forall p \in A$, $\varphi_p : A \longrightarrow V$ dada por $\varphi_p(q) = \varphi(p,q)$ es biyectiva

$A = K^n$
$V = K^n$

$$\begin{cases} \varphi(p,q) \overset{def}{=} (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)_{B_c} \\ p = (a_1, \dots, a_n) \\ q = (b_1, \dots, b_n) \end{cases}$$

(A, V, φ) es un espacio afín

$$\varphi(p,r) + \varphi(r,q) = (c_1 - a_1, \dots, c_n - a_n)_{B_c} + (b_1 - c_1, \dots, b_n - c_n)_{B_c} = \underset{\varphi(p,q)}{\underset{\parallel}{(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)_{B_c}}}$$

Veamos φ_p inyectiva

$$\underset{(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)_{B_c}}{\underset{\parallel}{\varphi_p(q)}} = \varphi_p(r) = (c_1 - a_1, \dots, c_n - a_n)_{B_c} \Longrightarrow c_i - a_i = b_i - a_i, \forall i = 1, \dots, n \Longrightarrow q = r$$

Veamos φ_p suprayectiva

$v = (x_1, \dots, x_n)_{B_c}$

$$\varphi_p(q) = v \Longrightarrow (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)_{B_c} = (x_1, \dots, x_n)_{B_c} \Longrightarrow b_i - a_i = x_i, \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Longrightarrow b_i = x_i + a_i, \forall i = 1, \dots, n$$

$\dim_V = 1 \Longrightarrow$ Recta afín
$\dim_V = 2 \Longrightarrow$ Plano afín
$\vdots$

Si $A = V$ (los puntos son vectores)
$\varphi(v,w) = w - v \Longrightarrow (A, V, \varphi)$ es un espacio afín

Estructura de las soluciones de un sistema

Sea Σ sistema de ecuaciones lineales (no necesariamente homogéneo)

$\Sigma(K) \subseteq K^n$, Σ_0 sistema homogéneo asociado, $\Sigma_0(K) < K^n$

Si $\Sigma(K) \neq \emptyset \Longrightarrow \Sigma(K) = (a_1, \dots, a_n) + \Sigma_0(K)$

$A = \Sigma(K)$, $V = \Sigma_0(K)$, $\varphi((a_1, \dots, a_n) + v, (a_1, \dots, a_n) + w) = w - v$

$\Longrightarrow$ (A, V, φ) es un espacio afín

Proposición

i) $\overrightarrow{pp} = 0$

ii) $\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$

iii) $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs} \iff \overrightarrow{pr} = \overrightarrow{qs}$ Regla del paralelogramo

Dem.

i) $\overrightarrow{pp} + \overrightarrow{pp} = \overrightarrow{pp} \Longrightarrow \overrightarrow{pp} = 0$

ii) $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp} = \overrightarrow{pp} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$

iii) $\boxed{\Rightarrow}$ $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{rs} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{qs}$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rq} = \overrightarrow{qs} + \overrightarrow{rq} = \overrightarrow{rs}$

$\overrightarrow{pq} = v \in V \Longrightarrow p + v \overset{def}{=} q$: $A \times V \longrightarrow A$

$(p, v) \longmapsto p + v = q$, donde $q \in A$ es el único punto tal que $v = \overrightarrow{pq} = \varphi_p(q)$

Propiedades

i) $p + \underset{=\overrightarrow{pp}}{0} = p$

ii) $p + (v + w) = (p + v) + w$ Asociatividad mixta

Dem.

$v = \overrightarrow{pq}$, $w = \overrightarrow{qr}$, $v + w = \overrightarrow{pr}$

$p + (v + w) = p + \overrightarrow{pr} = r$, $(p + v) + w = q + w = r$

iii) $\forall p \in A \Rightarrow (\forall q \in A), \exists v \in V$ tal que $p+v=q$

Notación

$(V,+)$ grupo, $(V,+)$ es una acción sobre A fiel (inyectiva) y transitiva

$q-p=\overrightarrow{pq}$

$(q-p)+(r-q)=r-p=\overrightarrow{pr}$

Definición (Variedad afín)

Sea $p \in A$, $W < V$

$p+W=\{p+w,\ w \in W\}$ es la variedad afín que pasa por p con dirección W.

OBS

$(X=p+W \neq \emptyset,\ W,\ \varphi|_{X\times X})$ es espacio afín

Dem.

$p=p+0 \in X$

W e.v.

$\varphi|_{X\times X}: X\times X \longrightarrow V$

$\underset{q,r \in X}{\varphi(q,r)} = \varphi(p+w_1, p+w_2) = \varphi(p+w_1, p+w_1+(w_2-w_1)) = w_2-w_1 \in W$

$q \in X \Rightarrow \varphi_q : X \longrightarrow W$ ¿biyectiva?

φ_q es inyectiva

Sea $w \in W$, ¿$\varphi_q(r)=w$, $r \in X$?

$w=\underset{\underset{\varphi(q,r)=\overrightarrow{qr}}{\parallel}}{\varphi_q(r)}$, $r \in A$ único

$r=q+\overrightarrow{qr}=p+\underset{\underset{\varphi(p,q)}{\parallel}}{\overrightarrow{pq}}+\overset{=w\in W}{\overrightarrow{qr}} \in p+W=X \Rightarrow r \in X$

$\left.\begin{matrix} p \in X \\ q \in X \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{pq} \in W$

Proposición

$X = p + W$ variedad afín. Entonces:

i) $X = q + W,\ \forall q \in X$

ii) $W = \{ \underbrace{\overrightarrow{pq},\ q \in X}_{\overrightarrow{pX}} \} = \{ \overbrace{\overrightarrow{qr},\ q, r \in X}^{\overrightarrow{X}} \}$

$\overrightarrow{X}$ Vectores con origen y extremo en X

$\overrightarrow{pX}$ ← Vectores con origen en p y extremo en X

Dem.

i) Veamos $p + W \subseteq q + W$ (el recíproco es análogo)

$p + w = q + (\overrightarrow{qp} + w) \in q + W$, pues $\overrightarrow{qp} \in W$, porque $q \in X \Rightarrow q = p + w'$

$\Rightarrow \overrightarrow{pq} = w'$

$\Rightarrow \overrightarrow{qp} = -w' \in W$

ii) $\overrightarrow{pX} \subseteq \overrightarrow{X}$ ¿$\overrightarrow{X} \subseteq W$?

$\underset{q, r \in X}{\overrightarrow{qr}} = \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pr} - \overrightarrow{pq} \underset{\uparrow}{=} \overset{\in W}{w} - \overset{\in W}{w'} \in W$

$r = p + \overrightarrow{pr}$

¿$W \subseteq \overrightarrow{pX}$?

$w \in W \Rightarrow q = p + w \in X \Rightarrow w = \overrightarrow{pq} \in \overrightarrow{pX}$

Definición (Posiciones relativas)

Supongamos X_1, X_2 variedades de (A, V, φ)

X_1 y X_2
- se cortan (son secantes) si $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$
- son paralelas si $\overrightarrow{X_1} \subseteq \overrightarrow{X_2}$ o $\overrightarrow{X_2} \subseteq \overrightarrow{X_1}$
- se cruzan, en caso contrario

Proposición

$$X_1, X_2 \text{ variedades} \begin{cases} X_1 \cap X_2 = \emptyset \implies X_1 \cap X_2 \text{ no es variedad} \\ X_1 \cap X_2 \neq \emptyset \implies X_1 \cap X_2 \text{ es variedad} \end{cases}$$

$$p \in X_1 \cap X_2 \implies X_1 \cap X_2 = p + (\vec{X_1} \cap \vec{X_2}), \quad \overrightarrow{X_1 \cap X_2} = \vec{X_1} \cap \vec{X_2}$$

Dem.

$$\left.\begin{array}{l} p \in X_1 \implies X_1 = p + \vec{X_1} \supseteq p + (\vec{X_1} \cap \vec{X_2}) \\ p \in X_2 \implies X_2 = p + \vec{X_2} \supseteq p + (\vec{X_1} \cap \vec{X_2}) \end{array}\right\} \implies X_1 \cap X_2 \supseteq p + (\vec{X_1} \cap \vec{X_2})$$

$$q \in X_1 \cap X_2 \implies q = \begin{cases} p + w_1 = p + \vec{pq_1}, \ q_1 \in X_1 \\ p + w_2 = p + \vec{pq_2}, \ q_2 \in X_2 \end{cases} \implies \begin{cases} q = q_1 \\ q = q_2 \end{cases} \overset{w_1 = w_2}{\implies} q = p + w \in p + (\vec{X_1} \cap \vec{X_2})$$

$$\implies X_1 \cap X_2 \subseteq p + (\vec{X_1} \cap \vec{X_2})$$

$$\implies X_1 \cap X_2 = p + (\vec{X_1} \cap \vec{X_2}), \quad \overrightarrow{X_1 \cap X_2} = \vec{X_1} \cap \vec{X_2}$$

Proposición

X_1, X_2 variedades $\implies X_1 \cup X_2$ no es variedad (por lo general)

Definición (**Suma de variedades**)

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = p_1 + \vec{X_1} \\ X_2 = p_2 + \vec{X_2} \end{array}\right\} \quad X_1 + X_2 \overset{\text{def}}{=} p_1 + \vec{X_1} + \vec{X_2} + L(\vec{p_1 p_2})$$

$$\underset{p_1 + \vec{X_1}}{\underset{\parallel}{X_1}} \subseteq \underset{p_1 + \vec{X_1} + \vec{X_2} + L(\vec{p_1 p_2})}{\underset{\parallel}{X_1 + X_2}}$$

$$\underset{p_2 + \vec{X_2}}{\underset{\parallel}{X_2}} \subseteq \underset{p_1 + X_1 + X_2 + L(\vec{p_1 p_2})}{\underset{\parallel}{X_1 + X_2}}$$

$$p_1 = p_2 + \underbrace{\vec{p_2 p_1}}_{= -\vec{p_1 p_2} \in L(\vec{p_1 p_2})}$$

$X_1 = p_1 + \overrightarrow{X_1}$, $X_2 = p_2 + \overrightarrow{X_2}$

$X_1 + X_2 = p_1 + (\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2} + L(\overrightarrow{p_1p_2}))$

Propiedades

$X_1, X_2 \subseteq X_1 + X_2 \implies X_1 \cup X_2 \subseteq X_1 + X_2$

Veamos $X_1 \cup X_2 \subseteq X$, X variedad $\implies X_1 + X_2 \subseteq X$ ($X_1 + X_2$ es la menor variedad que contiene a $X_1 \cup X_2$)

Dem.

$p_1 \in X_1 + X_2$

$p_1 \in X_1 \subseteq X_1 \cup X_2 \subseteq X \implies p_1 \in X$

$X_1 \cup X_2 \subseteq X \implies \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2} \subseteq \overrightarrow{X}$

$\overrightarrow{X} = \{\overrightarrow{pq} : p, q \in X\}$

$p_1 \in X_1, p_2 \in X_2 \implies p_1, p_2 \in X_1 \cup X_2 \implies p_1, p_2 \in X \implies \overrightarrow{p_1p_2} \in \overrightarrow{X}$

$\implies p_1 + (\overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2} + L(\overrightarrow{p_1p_2})) \subseteq X \implies \underline{X_1 + X_2 \subseteq X}$

Proposición

$X_1 = p_1 + \overrightarrow{X_1}$, $X_2 = p_2 + \overrightarrow{X_2}$

$X_1 \cap X_2 \neq \emptyset \iff \overrightarrow{p_1p_2} \in \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}$

Dem.

$\boxed{\implies}$ $p \in X_1 \cap X_2 \implies \overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{p_1p} + \overrightarrow{pp_2} \in \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2}$

$\boxed{\impliedby}$ $\overrightarrow{p_1p_2} \in \overrightarrow{X_1} + \overrightarrow{X_2} \implies \overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{p_1q_1} + w_2$, $q_1 \in X_1$, $\overset{*}{w_2} \in \overrightarrow{X_2}$

$\implies w_2 = \overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{q_1p_1} = \overrightarrow{q_1p_2} \implies -w_2 = \overrightarrow{p_2q_1} = \varphi_{p_2}(q_1)$

$\overset{*}{\|}$

$\overrightarrow{p_2q_2}$, $q_2 \in X_2$

$\implies \varphi_{p_2}(q_1) = \varphi_{p_2}(q_2) \implies q_1 = q_2 \implies \underline{X_1 \cap X_2 \neq \emptyset}$

$\dim X = \dim \vec{X}$

Teorema

X_1, X_2 variedades

$$\dim(X_1 + X_2) = \begin{cases} \dim X_1 + \dim X_2 - \dim X_1 \cap X_2, & \text{si } X_1 \cap X_2 \neq \emptyset \\ \dim X_1 + \dim X_2 + 1 - \dim(\vec{X_1} \cap \vec{X_2}), & \text{si } X_1 \cap X_2 = \emptyset \end{cases}$$

Dem.

- $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$: $X_1 \cap X_2$ es variedad y $\overrightarrow{X_1 \cap X_2} = \vec{X_1} \cap \vec{X_2}$

$$\dim(X_1 + X_2) = \dim(\overrightarrow{X_1 + X_2}) = \dim(\vec{X_1} + \vec{X_2} + L(\overrightarrow{p_1p_2}))$$

$$\underset{\overrightarrow{p_1p_2} \in \vec{X_1} + \vec{X_2}}{=} \dim(\vec{X_1} + \vec{X_2}) = \underbrace{\dim \vec{X_1}}_{\dim X_1} + \underbrace{\dim \vec{X_2}}_{\dim X_2} - \underbrace{\dim(\vec{X_1} \cap \vec{X_2})}_{\dim(X_1 \cap X_2)}$$

- $X_1 \cap X_2 = \emptyset$: $\overrightarrow{p_1p_2} \notin \vec{X_1} + \vec{X_2}$

$$\dim(X_1 + X_2) = \dim(\overrightarrow{X_1 + X_2}) = \dim(\vec{X_1} + \vec{X_2} + L(\overrightarrow{p_1p_2}))$$

$$= \dim(\vec{X_1} + \vec{X_2}) + \dim L(\overrightarrow{p_1p_2}) - \dim((\vec{X_1} + \vec{X_2}) \cap L(\overrightarrow{p_1p_2}))$$

$$= \dim \vec{X_1} + \dim \vec{X_2} - \dim(\vec{X_1} \cap \vec{X_2}) + 1 - \dim\{0\}$$

$$= \underline{\dim X_1 + \dim X_2 + 1 - \dim(\vec{X_1} \cap \vec{X_2})}$$

Ej: r, s rectas $\subseteq \mathbb{R}^3$, r y s se cruzan

$r \not\parallel s$, $r \cap s = \emptyset$

$$3 \geq \dim(r+s) = \dim r + \dim s + 1 - \dim(\vec{r} \cap \vec{s}) = 1 + 1 + 1 - 0 = 3$$

$$\Rightarrow \dim(r+s) = 3 \Rightarrow r+s = p_0 + \overrightarrow{r+s} = p_0 + \underset{\text{espacio vectorial}}{\mathbb{R}^3} = \underset{\text{conjunto de puntos}}{\mathbb{R}^3}$$

Ej: r recta, π plano, $\mathbb{R}^3$, $r \cap \pi = \{p_0\} \neq \emptyset$

$$3 \geq \dim(r+\pi) = \dim r + \dim \pi - \dim(r \cap \pi) = 1 + 2 - 0 = 3$$

$$\Rightarrow \dim(r+\pi) = 3 \Rightarrow r + \pi = \mathbb{R}^3$$

Ej: $\mathbb{R}^4$, π_1 y π_2 planos, π_1 y π_2 se cruzan

$\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, $\pi_1 \nparallel \pi_2$, $\dim(\vec{\pi_1} \cap \vec{\pi_2}) = 1$ No podría ser 0

$4 \geq \dim(\pi_1 + \pi_2) = \dim \pi_1 + \dim \pi_2 + 1 - \dim(\vec{\pi_1} \cap \vec{\pi_2}) = 2 + 2 + 1 - 1 = 4$

$\Longrightarrow \dim(\pi_1 + \pi_2) = 4 \Longrightarrow \pi_1 + \pi_2 = \mathbb{R}^4$

Definición (Sistema de referencia cartesiano)

(A, V, φ) espacio afín.

Fijemos $p_0 \in A$. Sea $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base de V.

Sea un $p \in A \Longrightarrow \overrightarrow{p_0 p} = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$, $x_i \in K$

Entonces $p = (x_1, \dots, x_n)_R$ son las coordenadas de p en el sistema de referencia afín $R = \{p_0, B\}$

OBS

p_0 origen del sistema de referencia

Pues $\overrightarrow{p_0 p_0} = 0u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_n = \vec{0} \Longrightarrow p_0 = (0, \dots, 0)_R$ en cualquier base B.

Definición (Coordenadas en un sistema de referencia)

$R = \{p_0, B\}$, $p_0 \in A$, B base de V, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$p \in A \Longrightarrow p = (x_1, \dots, x_n)_R \overset{def}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{p_0 p} = (x_1, \dots, x_n)_B = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

Cambio de sistema de referencia 26/04/2021

$R' = \{p_0', B'\}$, $p_0' = \{x_1', \dots, x_n'\}_{B'}$

$\overrightarrow{p_0 p} = \overrightarrow{p_0 p_0'} + \overrightarrow{p_0' p} \Longrightarrow \overrightarrow{p_0 p} - \overrightarrow{p_0 p_0'} = \overrightarrow{p_0' p}$

$\Longrightarrow (x_1, \dots, x_n)_B - (a_1, \dots, a_n)_B = (x_1', \dots, x_n')_{B'}$

$\Longrightarrow (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)_B = (x_1', \dots, x_n')_{B'}$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} = M(B', B) \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + M(B, B') \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline a_1 & \\ \vdots & \underbrace{M(B',B)}_{v_i'} \\ a_n & \end{array}\right)}_{M(R',R)} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

p_0'

$$|M(R',R)| = 1 \cdot |M(B',B)| \neq 0 \Longrightarrow \exists\ M(R',R)^{-1} = M(R,R')$$

Definición (Sistema de referencia afín)

$n = \dim A$

$\{p_0, \dots, p_n\}$ es sistema de referencia afín sí $\{\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}\}$ es base de V

$R = \{p_0, B = \{\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}\}\}$ es sistema de referencia cartesiano

$R = \{p_0, B = \{v_1, \dots, v_n\}\}$ es sistema de referencia cartesiano

$\Longrightarrow \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ es sistema de referencia afín

Definición (Puntos afinmente independientes)

$\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$, $m \leq n$, son afinmente independientes si $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_m}$ son l.i.

(La independencia no depende de qué punto tomemos como origen)

Definición ($A(P)$)

$P = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ son $m+1$ puntos arbitrarios

Llamamos $A(P) = p_0 + L(\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_m})$ Es la variedad afín más pequeña que contiene a todos los puntos.

$\dim A(P) = \dim L(\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_m})$

$$\emptyset \neq P \subseteq A \Longrightarrow A(P) = A(\underbrace{p_0, \dots, p_m}_{\text{Afinmente independientes}})$$

$$A(P) = \underset{\in P}{p_0} + L(\underbrace{\{\overrightarrow{p_0p}, p \in P\}}_{\text{Sobran muchos}})$$

Ecuaciones cartesianas y paramétricas

Sea $X = q_0 + \vec{X}$ variedad afín, $q_0 \in X$, $\dim X = m$ ($\dim \vec{X} = m$), $m \leq n$, $p = n - m$

Sea $R = \{p_0, B\}$ sistema de referencia cartesiano

$p_1 = (x_1, \dots, x_n)_R$, $q_0 = (c_1, \dots, c_n)_R$, $\overrightarrow{q_0 p_1} = (x_1 - c_1, \dots, x_n - c_n)_B$

$$p_1 \in X \iff \overrightarrow{q_0 p_1} \in \vec{X} \overset{\vec{X} < V}{\iff} \underset{(\text{en } R)}{X:} \begin{cases} a_{11}(x_1 - c_1) + \dots + a_{1n}(x_n - c_n) = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}(x_1 - c_1) + \dots + a_{pn}(x_n - c_n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = \overbrace{a_{11} c_1 + \dots + a_{1n} c_n}^{b_1} \\ \vdots \\ a_{p1} x_1 + \dots + a_{pn} x_n = \underbrace{a_{p1} c_1 + \dots + a_{pn} c_n}_{b_n} \end{cases}$$

Paso a ecuaciones paramétricas:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{cases} x_{p+1} = \lambda_{p+1} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_n \\ x_1 = c_{1\,p+1} \lambda_{p+1} + \dots + c_{n\,p+1} \lambda_n \\ \vdots \\ x_p = c_{p\,p+1} \lambda_{p+1} + \dots + c_{pn} \lambda_n \end{cases}$$

Se expresan en función de las independientes

Definición (Aplicación afín)

Sea $\varnothing : A \to A'$, A y A' espacios afines, $\lambda : V \to V'$ k-lineal

El par $(\varnothing, \lambda)$ es una aplicación afín si $q = p + v \implies \varnothing(q) = \varnothing(p) + \lambda(v)$

$\underset{\overrightarrow{pq}}{\overset{\parallel}{v}} \overset{\lambda}{\longmapsto} \underset{\overrightarrow{\varnothing(p)\varnothing(q)}}{\overset{\parallel}{\lambda(v)}} \implies \lambda$ está definida de manera única por $\varnothing$ de forma que $\lambda(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\varnothing(p)\varnothing(q)}$

Por comodidad, $\lambda = \vec{\varnothing}$ Aplicación lineal asociada

$\implies \varnothing : A \to A'$ es afín si $\vec{\varnothing} : V \to V'$ dada por $\vec{\varnothing}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\varnothing(p)\varnothing(q)}$ es k-lineal

Ej: $\varnothing : A \to A'$, $\varnothing(p) = p_0'$

$\vec{\varnothing}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\varnothing(p)\varnothing(q)} = \overrightarrow{p_0' p_0'} = 0 \implies \vec{\varnothing}$ es la aplicación nula

Ej: $\varnothing : A \to A$ afín, $\vec{\varnothing} = id_V$, $\vec{\varnothing} : V \to V$

$\vec{\varnothing}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{\varnothing(p)\varnothing(q)} \implies \overrightarrow{p\varnothing(p)} = \overrightarrow{q\varnothing(q)} = v$

$\implies \varnothing(p) = p + v \equiv$ Traslación de vector v

Caso inverso: Dada la traslación $\varnothing(p) = p+v$, veamos $\varnothing$ es afín

Hay que ver que $\vec{\varnothing}$ es k-lineal:

$$\vec{\varnothing}(\vec{pq}) = \overrightarrow{\varnothing(p)\varnothing(q)} = \overrightarrow{p+v,\, q+v} = \overrightarrow{p+v,\, (p+\vec{pq})+v} = \overrightarrow{p+v,\, p+(\underset{v+\vec{pq}}{\underset{\shortparallel}{\vec{pq}+v}})}$$

$$= \overrightarrow{p+v,(p+v)+\vec{pq}} = \vec{pq} \Longrightarrow \vec{\varnothing} = id_V \text{ es lineal}$$

$\Longrightarrow$ Todas las traslaciones son afines

Definición (Conjunto de puntos fijos $A_\varnothing$)

Sea $\varnothing : A \longrightarrow A$ afín.

$A_\varnothing = \{ p \in A,\ \varnothing(p) = p \}$

Ej: $\varnothing : A \to A$, $\varnothing(p) = p_0 \Longrightarrow A_\varnothing = \{p_0\}$ ($A_\varnothing$ es variedad)

Ej: $\varnothing : A \longrightarrow A$, traslación de vector $v \Longrightarrow \begin{cases} A_\varnothing = \varnothing, \text{ si } v \neq 0 \ (A_\varnothing \text{ no es variedad}) \\ A_\varnothing = A, \text{ si } v = 0 \ (A_\varnothing \text{ es variedad}) \end{cases}$

Proposición

Si $A_\varnothing \neq \varnothing \Longrightarrow A_\varnothing$ es variedad y $\vec{A_\varnothing} = V_{\vec{\varnothing},1}$

Dem.

$A_\varnothing \neq \varnothing$. Veamos $A_\varnothing = p_0 + V_{\vec{\varnothing},1}$, donde $p_0 \in A_\varnothing$

Veamos $p_0 + V_{\vec{\varnothing},1} \subseteq A_\varnothing$

$p = p_0 + v$, $v \in V_{\vec{\varnothing},1}$, $v = \vec{p_0p}$

$p = p_0 + \vec{p_0p} \Longrightarrow \varnothing(p) = \varnothing(p_0) + \vec{\varnothing}(v) = p_0 + v = p \Longrightarrow \varnothing(p) = p$

Veamos $A_\varnothing \subseteq p_0 + V_{\vec{\varnothing},1}$

$p \in A_\varnothing$

$p = p_0 + \vec{p_0p} \in p_0 + V_{\vec{\varnothing},1}$

$\vec{\varnothing}(\vec{p_0p}) = \overrightarrow{\varnothing(p_0)\varnothing(p)} = \vec{p_0p} \in V_{\vec{\varnothing},1}$

Ej: $\phi : A \to A$

$\vec{\phi} : V \to V$, $\vec{\phi} = r\, id_V$, $r \neq 1$ ($\vec{\phi}$ homotecia)

ϕ es afín

Puntos fijos de una homotecia

$\phi : A \to A$, $\vec{\phi} = r\, id_V$, $r \neq 0, 1$, ϕ es homotecia

Veamos que solo existe un punto fijo. ($A_\phi = \{c\}$)

Veamos $|A_\phi| \leq 1$ En caso de haber no hay más de uno

$$p, q \in A_\phi \Longrightarrow r\,\overrightarrow{pq} = r\,\overrightarrow{\phi(p)\phi(q)} = r\,\vec{\phi}(\overrightarrow{pq}) = r^2\,\overrightarrow{pq} \Longrightarrow r(1-r)\,\overrightarrow{pq} = 0$$

$$\underset{r \neq 0,1}{\Longrightarrow} \overrightarrow{pq} = 0 \Longrightarrow p = q$$

Veamos que hay exactamente un punto fijo.

$c \overset{(*)}{=} p + \frac{1}{1-r}\,\overrightarrow{p\phi(p)}$. Veamos c es fijo.

$$\phi(c) = \phi(p) + \frac{1}{1-r}\,\vec{\phi}(\overrightarrow{p\phi(p)}) = p + \overrightarrow{p\phi(p)} + \frac{r}{1-r}\,\overrightarrow{p\phi(p)}$$

$$= p + \overrightarrow{p\phi(p)}\left(1 + \frac{r}{1-r}\right) = p + \frac{1}{1-r}\,\overrightarrow{p\phi(p)}$$

Veamos como se llega a la fórmula del punto fijo. (*)

Sea $c \in A_\phi$: $r\,\overrightarrow{pc} = \vec{\phi}(\overrightarrow{pc}) = \overrightarrow{\phi(p)\phi(c)} = \overrightarrow{\phi(p)c} = \overrightarrow{\phi(p)p} + \overrightarrow{pc}$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{p\phi(p)} = (1-r)\,\overrightarrow{pc} \Longrightarrow \overrightarrow{pc} = \frac{1}{1-r}\,\overrightarrow{p\phi(p)} \Longrightarrow \boxed{c = p + \overrightarrow{pc} = p + \frac{1}{1-r}\,\overrightarrow{p\phi(p)}}$$

Matriz de una aplicación afín

$\phi : A \longrightarrow A'$ afín, $\underbrace{R = \{p_0, B\}}_{\text{referencia en } A}$, $\underbrace{R' = \{p_0', B'\}}_{\text{referencia en } A'}$, $\dim A = \dim V = n$, $\dim A' = \dim V' = m$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $B' = \{v_1', \dots, v_m'\}$

$p \in A \implies \phi(p) \in A'$

$\phi(p_0) \in A'$

$p = (x_1, \dots, x_n)_R \implies \overrightarrow{p_0 p} = (x_1, \dots, x_n)_B$

$\phi(p_0) = (a_1, \dots, a_m)_{R'} \implies \overrightarrow{p_0' \phi(p_0)} = (a_1, \dots, a_m)_{B'}$

$\phi(p) = (x_1', \dots, x_m')_{R'} \implies \overrightarrow{p_0' \phi(p)} = (x_1', \dots, x_m')_{B'}$

$$\overrightarrow{p_0' \phi(p)} = \overrightarrow{p_0' \phi(p_0)} + \overrightarrow{\phi(p_0) \phi(p)} = \overrightarrow{p_0' \phi(p_0)} + \vec{\phi}(\overrightarrow{p_0 p})$$

$$\implies \vec{\phi}(\overrightarrow{p_0 p}) = \overrightarrow{p_0' \phi(p)} - \overrightarrow{p_0' \phi(p_0)}$$

$$\implies \vec{\phi}((x_1, \dots, x_n)_B) = (x_1', \dots, x_n')_B - (a_1, \dots, a_n)_B = (x_1' - a_1, \dots, x_n' - a_n)_B$$

$$\implies \begin{pmatrix} x_1' - a_1 \\ \vdots \\ x_n' - a_n \end{pmatrix} = M_{B,B'}(\vec{\phi}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + M_{B,B'}(\vec{\phi}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\implies \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline a_1 & \\ \vdots & M_{B,B}(\vec{\phi}) \\ a_n & \end{array}\right)}_{M_{R,R'}(\phi)} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

Ej: ϕ constante, $R = \{p_0, B\}$, $R'\{p_0', B'\}$, $p_0' = \phi(p_0)$

$\Downarrow$

$\vec{\phi} = 0$

$$M_{R,R'}(\phi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & O & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$0 = \overrightarrow{p_0' \phi(p_0)} = (a_1, \dots, a_m)_B \implies a_1 = \dots = a_m = 0$

Ej: ϕ traslación , $R = \{p_0, B\}$

$\Downarrow$

$\vec{\phi} = id_V$

Si elegimos como primer vector de la base el vector de la traslación

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_1 & & & \\ \vdots & & I_n & \\ a_n & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & I_n & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

No existe ningún punto fijo

$$\overrightarrow{p_0\phi(p_0)} = (a_1, \dots, a_n)_B \neq (0, \dots, 0)_B$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{p_0\phi(p_0)} = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$$

$\quad\equiv$

Vector de la traslación

Ej: ϕ homotecia de razón $r \neq 0,1$ con centro c

$\vec{\phi} = r\, id_V$. $R = \{c, B\}$

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & rI_n & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$\overrightarrow{c\phi(c)} = 0$

Si no conociéramos el punto fijo c:

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_1 & & & \\ \vdots & & rI_n & \\ a_n & & & \end{array}\right) = A$$

$$\underset{\substack{\| \\ c}}{(x_1, \dots, x_n)_R} \in A_\phi \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_1 + rx_1 \\ x_2 = a_2 + rx_2 \\ \vdots \\ x_n = a_n + rx_n \end{array} \right.$$

$x_i = a_i + rx_i$

$\Longrightarrow (1-r)x_i = a_i$

$\underset{r \neq 1}{\Longrightarrow} x_i = \dfrac{a_i}{1-r}$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{p_0c} = \left(\frac{a_1}{1-r}, \dots, \frac{a_n}{1-r}\right)_B$$

Proyecciones afines

$\phi : A \longrightarrow A$ afín

Veamos $\phi^2 = \phi \Longleftrightarrow \vec{\phi}^{\,2} = \vec{\phi}$ y $A_\phi \neq \emptyset$

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\phi^2 = \phi \Longrightarrow \vec{\phi}^{\,2} \underset{\uparrow}{=} \vec{\phi} \circ \vec{\phi} = \overrightarrow{\phi^2} = \vec{\phi}$

$$\overrightarrow{\psi \circ \phi}\,(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{(\psi \circ \phi)(p)\ (\psi \circ \phi)(q)} = \overrightarrow{\psi(\phi(p))\ \psi(\phi(q))}$$

$$= \vec{\psi}\left(\overrightarrow{\phi(p)\,\phi(q)}\right) = \vec{\psi}\,(\vec{\phi}\,(\overrightarrow{pq}))$$

¿$A_\phi \neq \emptyset$?

$\forall p \in A,\ \phi(\phi(p)) = \phi(p) \Longrightarrow \phi(p) \in A_\phi \Longrightarrow \begin{cases} A_\phi \neq \emptyset \\ Im(\phi) \subseteq A \text{ y si } p \in A_\phi \end{cases}$

$\Longrightarrow p = \phi(p) \in Im\,\phi$

$\Longrightarrow Im(\phi) = A_\phi$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $p_0 \in A_\phi$, $p \in A$

$p = p_0 + v$, $v = \overrightarrow{p_0 p}$

$$\left.\begin{aligned} \phi(p) &= \phi(p_0) + \vec{\phi}(v) = p_0 + \vec{\phi}(v) \\ \phi^2(p) &= \phi^2(p_0) + \vec{\phi}^{\,2}(v) = p_0 + \vec{\phi}^{\,2}(v) = p_0 + \vec{\phi}(v) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \phi^2 = \phi$$

Matriz canónica de una proyección

$\phi : A \longrightarrow A$ afín, $\phi^2 = \phi$ (ϕ proyección)

$R = \{p_0, B\}$, $p_0 \in A_\phi$, $B = \{\underbrace{v_1, \dots, v_m}_{\in V_{\vec{\phi},1}}, \underbrace{v_{m+1}, \dots, v_n}_{\in V_{\vec{\phi},0}}\}$

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ \hline 0 & 1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ 0 & & & & & \ddots & 0 \end{array}\right)$$

$x_1' = x_1$
$\vdots$
$x_m' = x_m$
$x_{m+1}' = 0$
$\vdots$
$x_n' = 0$

Justificación geométrica de la proyección

$\vec{\varnothing}: V \to V$ es proyección vectorial con base $V_{\vec{\varnothing},1}$ y dirección $V_{\vec{\varnothing},0}$

$\varnothing$ base $A_\varnothing = \begin{cases} Im(\varnothing) \\ \\ p_0 + V_{\vec{\varnothing},1}\,,\ p_0 \in A_\varnothing \end{cases}$, $\varnothing$ dirección $V_{\vec{\varnothing},0}$

Veamos $\{\varnothing(p)\} = A_\varnothing \cap (p + V_{\vec{\varnothing},0})$

$\boxed{\subseteq}$ $\varnothing(p) \in Im(\varnothing) = A_\varnothing$

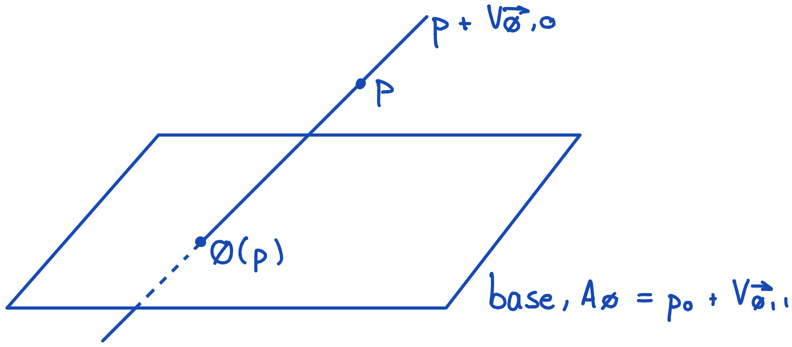
$$\vec{\varnothing}(\overrightarrow{p\,\varnothing(p)}) = \overrightarrow{\varnothing(p)\,\varnothing^2(p)} = \overrightarrow{\varnothing(p)\,\varnothing(p)} = 0$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{p\,\varnothing(p)} \in V_{\vec{\varnothing},0} \Longrightarrow \varnothing(p) = p + \overrightarrow{p\,\varnothing(p)} \in p + V_{\vec{\varnothing},0}$$

$\boxed{\supseteq}$ $A_\varnothing \cap (p + V_{\vec{\varnothing},0}) \neq \varnothing \Longrightarrow A_\varnothing \cap (p + V_{\vec{\varnothing},0})$ es variedad

$$\dim\left(A_\varnothing \cap (p + V_{\vec{\varnothing},0})\right) = \dim\left(\overrightarrow{A_\varnothing \cap (p + V_{\vec{\varnothing},0})}\right) = \dim\left(\overrightarrow{A_\varnothing} \cap \overrightarrow{(p + V_{\vec{\varnothing},0})}\right)$$

$$= \dim\left(V_{\vec{\varnothing},1} \cap V_{\vec{\varnothing},0}\right) = 0$$



Simetrías afines

$\phi : A \to A$ afín

Veamos $\phi^2 = id_A \iff \vec{\phi}^2 = id_V$ y $A_\phi \neq \emptyset$

Dem.

$\Rightarrow]$ $id_V = \overrightarrow{id_A} = \overrightarrow{\phi \circ \phi} = \vec{\phi} \circ \vec{\phi} \Rightarrow \vec{\phi}^2 = id_V$

Veamos $A_\phi \neq \emptyset$. Sea $\chi(K) \neq 2$

$p \in A \Rightarrow m = p + \frac{1}{2}\overrightarrow{p\phi(p)}$

$\phi(m) = \phi(p) + \frac{1}{2}\vec{\phi}\left(\overrightarrow{p\phi(p)}\right) = p + \overrightarrow{p\phi(p)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\phi(p)\phi^2(p)}$

$= p + \overrightarrow{p\phi(p)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\phi(p)p} = p + \overrightarrow{p\phi(p)} - \frac{1}{2}\overrightarrow{p\phi(p)} = m$

$\Leftarrow]$ $p_0 \in A_\phi$, $p = p_0 + v$, $v = \overrightarrow{p_0 p}$

$\phi^2(p) = \phi^2(p_0) + \vec{\phi}^2(v) = p_0 + id_V(v) = p_0 + v = p$

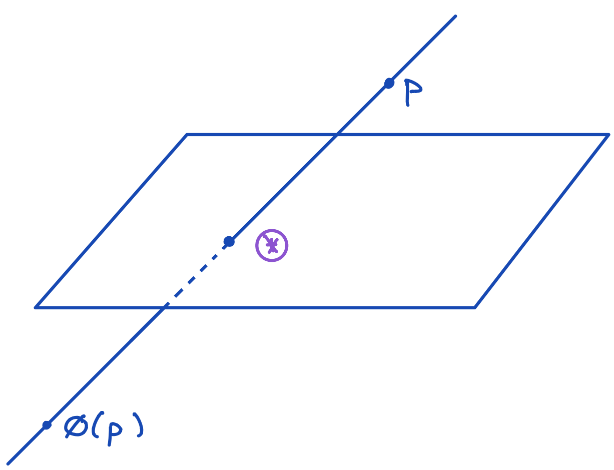
Matriz canónica de una simetría

$\phi : A \to A$ afín, $\phi^2 = id_A$

$R = \{p_0, B\}$, $p_0 \in A_\phi$, $B = \{\underbrace{v_1, \dots, v_m}_{\in V_{\vec{\phi},1}}, \underbrace{v_{m+1}, \dots, v_n}_{\in V_{\vec{\phi},-1}}\}$

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ \hline 0 & 1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & -1 \end{array}\right)$$

Justificación geométrica de la simetría



La relación entre proyección y simetría asociadas es que la proyección de un punto es el punto medio entre el punto y su simétrico

Homologías generales

$\phi : A \to A$ es homología (general) si $p_{\vec{\phi}} = (x-1)(x-r),\ r \neq 1, 0, -1$ y $A_\phi \neq \emptyset$

$R = \{p_0, B\}$, $p_0 \in A_\phi$, $B = \{\underbrace{v_1, \dots, v_m}_{\in V_{\vec{\phi},1}}, \underbrace{v_{m+1}, \dots, v_n}_{\in V_{\vec{\phi},r}}\}$

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots \; 1 \; r & \\ 0 & & & \ddots \; r \end{array}\right) \qquad x_i' = \begin{cases} x_i, & 1 \leq i \leq m \\ r x_i, & m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

!!

Llamamos a r la RAZÓN

$\underbrace{p_0 + L(v_1, \dots, v_m)}_{A_\phi} = p_0 + V_{\vec{\phi},1}$ es la BASE

$L(v_{m+1}, \dots, v_n) = V_{\vec{\phi},r}$ es la dirección

Si la base es un hiperplano, la matriz contiene solo una r

$\Rightarrow$ Toda homología general es composición de r homologías generales con base hiperplano.

Proposición

$A_\phi = \{p_0\} \iff 1 \notin \sigma(\vec{\phi})$

!!

Dem.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow (A - I_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$$

A

$\Rightarrow A_\phi = \{p_0\} \iff rg(A - I_n) = n \iff p_A(1) = |A - I_n| \neq 0 \iff 1 \notin \sigma(\vec{\phi})$

OBS

En cuanto a una homología general, $q_{\vec{\phi}} = (x-1)(x-r)$ no implica que $A_\phi \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ No implica que ϕ sea homología

Ej: $M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{array}\right)$

$\begin{cases} x_1 = 1 + x_1 \\ x_2 = r x_2 \end{cases}$ es imposible $\Rightarrow A_\phi = \emptyset$ y $q_{\vec{\phi}} = (x-1)(x-r)$

Proposición (Inyectividad, suprayectividad y biyectividad de aplicaciones afines)

$(\varnothing, \lambda)$, $\varnothing : A_1 \to A_2$, $\lambda : V_1 \to V_2$, $\lambda = \vec{\varnothing}$, $\lambda(\vec{pq}) = \overrightarrow{\varnothing(p)\varnothing(q)} = \vec{\varnothing}(\vec{pq})$

Veamos $\varnothing$ es inyectiva / suprayectiva / biyectiva $\iff$ λ es inyectiva / suprayectiva / biyectiva

Dem.

Veamos la inyectividad

$\boxed{\Rightarrow}$ $\lambda(\vec{pq}) = \lambda(\vec{pr}) \Rightarrow \varnothing(q) = \varnothing(p) + \lambda(\vec{pq}) = \varnothing(p) + \lambda(\vec{pr}) = \varnothing(r)$

$$\underset{\varnothing \text{ inyectiva}}{\Longrightarrow} q = r \Rightarrow \vec{pq} = \vec{pr}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\varnothing(q) = \varnothing(r) \Rightarrow \lambda(\vec{qr}) = \overrightarrow{\varnothing(q)\varnothing(r)} = 0 \underset{Ker(\lambda) = \{0\}}{\Longrightarrow} \vec{qr} = 0 \Rightarrow q = r$

Notación (Grupo afín)

$GA(A) = \{\varnothing : A \to A,\ \varnothing \text{ es afín y biyectiva}\}$

$\quad\equiv$

Grupo afín del espacio afín A $\qquad$ $\vec{\varnothing}$ biyectiva $(0 \notin \sigma(\vec{\varnothing}))$

OBS

El nombre viene de que $GA(A)$ es efectivamente un grupo.

$$\varnothing_1, \varnothing_2 \in GA(A) \Rightarrow \begin{cases} \varnothing_1 \circ \varnothing_2 \in GA(A) \\ \varnothing_1^{-1}, \varnothing_2^{-1} \in GA(A) \quad (\vec{\varnothing} \circ \vec{\varnothing}^{-1} = id_V) \end{cases}$$

Clasificación del grupo afín en el plano

$\dim A = 2$

CASO I : $K = \mathbb{C}$

• $1 \in \sigma(\vec{\phi})$:

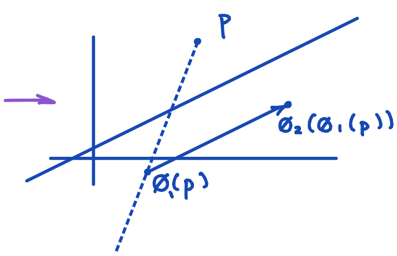
- $q_{\vec{\phi}} = (x-1) \Longrightarrow \phi$ traslación $\Longrightarrow \begin{cases} \phi = id_A \ (A_\phi = A) \\ \phi \neq id_A \ (A_\phi = \emptyset) \end{cases}$

- $q_{\vec{\phi}} = (x-1)(x-r)$, $r \neq 1, 0, -1 \Longrightarrow \vec{\phi}$ diagonalizable $\Longrightarrow \begin{cases} \phi \text{ homología general, si } A_\phi \neq \emptyset \\ (*)\ \phi \text{ homología general con desplazamiento, si } A_\phi = \emptyset \end{cases}$

(*)
$$M_R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & r \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_R(\phi_2)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & r \end{pmatrix}}_{M_R(\phi_1)} = M_R(\phi_2 \circ \phi_1) \Longrightarrow \phi = \underset{\text{traslación}}{\phi_2} \circ \underset{\text{homología}}{\phi_1}$$

$B = \{v_1, v_2\}$, $(a_1, a_2) \neq (0,0)$

- $q_{\vec{\phi}} = (x-1)(x+1) \Longrightarrow \begin{cases} \phi \text{ es simetría, si } A_\phi \neq \emptyset \\ \phi \text{ es simetría con desplazamiento, si } A_\phi = \emptyset \end{cases}$



- $q_{\vec{\phi}} = (x-1)^2 \Longrightarrow \begin{cases} A_\phi \neq \emptyset \overset{(*)}{\Longrightarrow} \phi \text{ es homología especial} \\ A_\phi = \emptyset \overset{(*)}{\Longrightarrow} \phi \text{ es homología especial con desplazamiento} \end{cases}$

(*) $R = \{p_0, B\}$, $p_0 \in A_\phi$, B base de Jordan

$$M_R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{base} = A_\phi = p_0 + V_{\vec{\phi},1} = p_0 + L(v_1) \text{ (eje)} \\ \text{dirección} = L(v_2) \end{array}$$

(*)
$$M_R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 1 \\ a_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_R(\phi_2 \circ \phi_1)$$

$A_{\phi_1} : \begin{cases} x = a_1 + x + y \\ y = y \end{cases}$

- $1 \notin \sigma(\vec{\phi})$: $A_\phi = \{p_0\} \Longrightarrow R = \{p_0, B\}$

- $q_{\vec{\phi}} = x - r$, $r \neq 1, 0 \Longrightarrow \vec{\phi} = r\,id_V \Longrightarrow \phi$ homotecia de razón r y centro p_0

$\begin{cases} x = rx \\ y = ry \end{cases}$

- $q_{\vec{\phi}} = (x-r)(x-s)$, $r, s \neq 1, 0 \Longrightarrow M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & s \end{array}\right)$

$\vec{\phi}$ diagonalizable

$B = \{v_1, v_2\}$, $v_1 \in V_{\vec{\phi}, r}$, $v_2 \in V_{\vec{\phi}, s}$

$$M_R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(\phi_2 \circ \phi_1),$$

ϕ_1, ϕ_2 homologías generales
(base y dirección cambian)

- $q_{\vec{\phi}} = (x-r)^2$, $r \neq 1, 0$:

$$M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & r & 1 \\ 0 & 0 & r \end{array}\right), \quad M_{R'}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & r \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ ϕ es homología especial compuesta con homotecia

CASO 2 : $K = \mathbb{R}$

Solo hay un caso nuevo :

- $q_{\vec{\phi}} = x^2 + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ irreducible

$= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$, $\alpha = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Longrightarrow M_B(\vec{\phi}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \boxed{M_R(\phi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{array}\right)}$$

$A_\phi = \{p_0\}$

OBS

Toda afinidad es composición de una afinidad con puntos fijos y una traslación.

Teorema

A, A' espacios afines, $p_0 \in A$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V.

Por tanto, $p_0' \in A'$, $v_1', \dots, v_n' \in V'$

$\exists!\ \phi : A \to A'$ afín tal que $\phi(p_0) = p_0'$ y $\phi(v_i) = v_i'$, $\forall i = 1, \dots, n$

Dem.

$$p \in A,\ p = p_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \implies \phi(p) = p_0' + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i'$$

Teorema

A, A' espacios afines, $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ sistema de referencia afín de A.

$\forall p_0', p_1', \dots, p_n' \in A'$, $\exists!\ \phi : A \to A'$ afín tal que $\phi(p_i) = p_i'$, $\forall i = 0, 1, \dots, n$

Isomorfismo de espacios afines

A, A' espacios afines, $A \overset{\phi}{\simeq} A' \implies V \overset{\vec{\phi}}{\simeq} V' \implies \dim V = \dim V'$

$\dim V = \dim V' \implies \exists\ \lambda : V \to V'$ isomorfismo

$p_0 \in A$, $p_0' \in A' \implies \exists!\ \phi : A \to A'$ tal que $\left\{ \begin{array}{l} \phi(p_0) = p_0' \\ \vec{\phi} = \lambda \end{array} \right.$

$\implies A \simeq A' \iff V \simeq V' \iff \dim V = \dim V'$

Variedades invariantes

$\phi : A \to A$ afín, $X = p + \vec{X}$ variedad

$$X <_{\phi} A \iff \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{p\phi(p)} \in \vec{X} \\ \vec{X} <_{\vec{\phi}} V \end{array} \right.$$

Cónicas

$A = \mathbb{R}^2$ plano afín real usual

C cónica si $\emptyset \neq C = \{ p = (x, y)_R \, , \, 0 = a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{01} x + 2a_{02} y + a_{00} \}$

$$a_{11} X + \dots + 2a_{0} Y + a_{00} \in \mathbb{R}[X, Y]$$

Veamos que cambiando de sistema de referencia se obtiene otro polinomio asociado.

$$C : 0 = (1 \ x \ y) \, A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \, , \, A = M_R(C) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$P = M(R', R) \, , \, \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \, , \, p = (x', y')_R$$

$$\Longrightarrow 0 = (1 \ x' \ y') \underbrace{P^t A P}_{A' = M_{R'}(C)} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = (1 \ x' \ y') \begin{pmatrix} a'_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ a'_{01} & a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{02} & a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow 0 = a'_{11} x'^2 + \dots + a'_{00}$ Seguimos teniendo un polinomio cuadrático

C no es una variedad afín

Sea $A' = M_R(C')$ Una nueva cónica

Definición (Cónicas afinmente equivalentes)

C y C' son afinmente equivalentes ($C \sim C'$) si $M_R(C) = M_{R'}(C')$

Es relación de equivalencia.

Teorema de clasificación de cónicas

Toda cónica real es afínmente equivalente a una y solo una de las siguientes

1) $x^2+y^2-1=0$ ≡ Elipse no degenerada
2) $x^2-y^2-1=0$ ≡ Hipérbola no degenerada
3) $x^2-y=0$ ≡ Parábola no degenerada
4) $x^2+y^2=0$ ≡ Elipse degenerada (Solo la verifica el $(0,0)_R$)
5) $x^2-y^2=0$ ≡ Hipérbola degenerada
6) $x^2-1=0$ ≡ Parábola simplemente degenerada
7) $x^2=0$ ≡ Parábola doblemente degenerada

!!

Dem.

$$0=(1\ x\ y)\,A\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix},\quad A=\left(\begin{array}{c|cc}a_{00}&a_{01}&a_{02}\\\hline a_{01}&\multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A_0}}\\a_{02}&&\end{array}\right),\quad A_0=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}$$ Parte cuadrática

$$=(x\ \ y)\,A_0\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+2(a_{01}\ a_{02})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+a_{00}\qquad A_0=M_B(q_0)\ (*)$$

$(*)$ $$K=\mathbb{R}\ \xRightarrow[\text{Inercia}]{\text{Ley de}}\ A_0\equiv A_0'=\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0\\0&\varepsilon_2\end{pmatrix},\ \varepsilon_i=1,-1,0$$

$$A_0=P^tA_0'P,\ P=M(B,B'),\ \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow 0=(x\ \ y)\,P^tA_0'P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+2(a_{01}\ a_{02})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+a_{00}$$

$$=(x'\ y')\,A_0'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+2(a_{01}\ a_{02})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+a_{00}$$

$$=\varepsilon_1(x')^2+\varepsilon_2(y')^2+2(a_{01}\ a_{02})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+a_{00}$$

$$=\varepsilon_1(x')^2+\varepsilon_2(y')^2+2(a_{01}\ a_{02})\,P^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+a_{00}$$

$$=\varepsilon_1(x')^2+\varepsilon_2(y')^2+2a_{01}'x'+2a_{02}'y'+\underset{a_{00}}{\underset{\parallel}{a_{00}'}}$$

$$=a_{11}x^2+\dots+a_{00}=0$$

ε_1 y ε_2 no pueden valer ambos 0 ($A_0\neq 0$)
Si ambos son -1 podemos multiplicar por -1. Por tanto, podemos suponer que alguno vale 1, y lo pondremos en ε_1.

$\varepsilon_1 = 1$

- $\varepsilon_2 = 1$:

$$(x')^2 + (y')^2 + 2a'_{01}x' + 2a'_{02}y' + a'_{00} = (x'+a'_{01})^2 + (y'+a'_{02})^2 + \underbrace{a'_{00} - a'^2_{01} - a'^2_{02}}_{a''_{00}}$$

$$\overset{*}{=} \begin{cases} x''^2 + y''^2 - 1 \ , \text{ si } a''_{00} < 0 \ * \\ x''^2 + y''^2 \ , \text{ si } a''_{00} = 0 \\ \text{no es cónica} \ , \text{ si } a''_{00} > 0 \end{cases}$$

$*$ $a''_{00} < 0 \Rightarrow -a''_{00} > 0 \Rightarrow \exists \sqrt{-a''_{00}} \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x'' = \dfrac{(x'+a'_{01})}{\sqrt{-a''_{00}}} \\ y'' = \dfrac{(y'+a'_{02})}{\sqrt{-a''_{00}}} \end{cases}$

$*$ $(x'+a'_{01})^2 + (y'+a'_{02})^2 + a''_{00} = x''^2 + y''^2 + a''_{00}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a'_{01} & 1 & 0 \\ a'_{02} & 0 & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$M(R', R'')$, $R'' = \{p_0'', B''\}$, $M(B', B'') = I_2 \Rightarrow B' = B''$

$\overrightarrow{p_0''p_0'} = a'_{01}v''_1 + a'_{02}v''_2 = a'_{01}v'_1 + a'_{02}v'_2 \neq 0$

$\Rightarrow p_0'' = (-a'_{01}, -a'_{02})_{R'}$

- $\varepsilon_2 = -1$:

$$(x')^2 - (y')^2 + 2a'_{01}x' + 2a'_{02}y' + a'_{00} = (x'+a'_{01})^2 - (y'-a'_{02})^2 + \underbrace{a'_{00} - a'^2_{01} + a'^2_{02}}_{a_0''}$$

$$= \begin{cases} x''^2 - y''^2 - 1 \ , \text{ si } a_0'' < 0 \\ x''^2 - y''^2 \ , \text{ si } a_0'' = 0 \\ x''^2 - y''^2 + 1 \ , \text{ si } a_0'' > 0 \end{cases}$$, que cambiando de sistema de referencia es igual al primer caso.

Lo que estamos haciendo se basa en un cambio de sistema de referencia:

$0 = a_{11}x^2 + \dots + a_{00} = \varepsilon_1 x'^2 + \varepsilon_2 y'^2 + 2a'_{01}x' + 2a'_{02}y' + a'_{00}$

$p = (x, y)_R$ $\qquad\qquad$ $p = (x', y')_{R'}$

$R = \{p_0, B\}$ $\qquad\qquad$ $R' = \{p_0', B'\}$, $p_0' = p_0$

$A_0 = M_B(q_0)$, $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = M_{B'}(q_0)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M(B', B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ P = M(B', B) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \overbrace{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{P}} \\ 0 & & \end{array}\right)}^{M(R, R')}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

• $\varepsilon_2 = 0$:

$$(x')^2 + 2a'_{01}x + 2a'_{02}y + a'_{00} = (x' + a'_{01})^2 + 2a'_{02}y' + a''_{00} = x''^2 + 2a'_{02}y + a''_{00}$$

• $a'_{02} \neq 0 \implies x''^2 - (-2a'_{02}y - a''_{00}) = x''^2 - y''$

$$x'' = x' + a'_{01}, \quad y'' = -2a'_{02}y - a''_{00}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a'_{01} & 1 & 0 \\ -a''_{00} & 0 & -2a'_{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

. La matriz es de cambio de referencia $\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2a'_{02} \end{pmatrix}$ es inversible

• $a'_{02} = 0 \implies 0 = x''^2 + a''_{00} = \begin{cases} x'''^2 - 1, & \text{si } a''_{00} < 0 \quad \text{Rectas paralelas} \\ x'''^2, & \text{si } a''_{00} = 0 \quad \text{Recta doble} \\ \text{no es cónica}, & \text{si } a''_{00} > 0 \end{cases}$

Clasificación de cónicas por invariantes

Sea C cónica

$A = M_R(C)$, $A' = M_{R'}(C)$, $A' = P^t A P$, $P = M(R', R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline c_1 & \multicolumn{2}{c}{P_0} \\ c_2 & & \end{array}\right)$, $P_0 = M(B', B)$

$$A' = \left(\begin{array}{c|cc} a'_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ \hline a'_{01} & \multicolumn{2}{c}{A'_0} \\ a'_{02} & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & c_1 & c_2 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{P_0^t} \\ 0 & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ \hline a_{01} & \multicolumn{2}{c}{A_0} \\ a_{02} & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline c_1 & \multicolumn{2}{c}{P_0} \\ c_2 & & \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow A \equiv A' \Longrightarrow \underset{r}{\underset{\shortparallel}{rg(A)}} = \underset{r'}{\underset{\shortparallel}{rg(A')}},\ \underset{(s,t)}{\underset{\shortparallel}{\varepsilon(A)}} = \underset{(s',t')}{\underset{\shortparallel}{\varepsilon(A')}},\ \text{signo}(|A|) = \text{signo}(|A'|)$$

Al multiplicar por -1, el rango no cambia pero ε sí. Lo que es invariante es $\delta = |s - t|$

$A'_0 = P_0^t A_0 P_0 \Longrightarrow A_0 \equiv A'_0 \Longrightarrow r_0 = r'_0,\ \delta_0 = \delta'_0,\ \text{signo}(|A_0|) = \text{signo}(|A'_0|)$

- C elipse no degenerada:

$$A \equiv \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad r = 3,\ \delta = 1,\ d < 0,\ r_0 = 2,\ \delta_0 = 2,\ d_0 > 0$$

- C elipse degenerada:

$$A \equiv \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad r = 2,\ \delta = 2,\ d = 0,\ r_0 = 2,\ \delta_0 = 2,\ d_0 > 0$$

- C hipérbola no degenerada:

$$A \equiv \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad r = 3,\ \delta = 1,\ d > 0,\ r_0 = 2,\ \delta_0 = 0,\ d_0 < 0$$

- C hipérbola degenerada:

$$A \equiv \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad r = 2,\ \delta = 0,\ d = 0,\ r_0 = 2,\ \delta_0 = 0,\ d_0 < 0$$

- C parábola no degenerada:

$$A \equiv \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & -1/2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad r = 3,\ \delta = ?,\ d < 0,\ r_0 = 1,\ \delta_0 = 1,\ d_0 = 0$$

· C parábola simplemente degenerada:

$$A \equiv \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad r = 2,\ \delta = 0,\ d = 0,\ r_0 = 1,\ \delta_0 = 1,\ d_0 = 0$$

· C parábola doblemente degenerada:

$$A \equiv \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad r = 1,\ \delta = 1,\ d = 0,\ r_0 = 1,\ \delta_0 = 1,\ d_0 = 0$$

Aplicaciones entre cónicas

Sea C cónica

$A = M_R(C)$, $A' = M_{R'}(C)$, $A' = P^t A P$, $P = M(R, R')$

$p \in C$, $p = (x, y)_R$, $p = (x', y')_{R'}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad P = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline c_1 & \multicolumn{2}{c}{\underset{\substack{\parallel \\ P_0 \text{ inversible}}}{M(B, B')}} \\ c_2 & & \end{array}\right) = M_R(\phi), \quad \phi(x, y)_R = (x', y')_R$$

$p = (x', y')_{R'}$

$\neq$

$\phi(p) = (x', y')_R$

$$0 = (1\ x\ y)\, A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = (1\ x'\ y')\, \underset{\substack{\uparrow \\ a'_{11} x^2 + \dots + a'_{00}}}{A'} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad A = M_R(C),\ A' = M_R(C')$$

$\Longrightarrow (x', y')_R \in C' \Longrightarrow \phi(x, y)_R \in C'$

Además, $\vec{\phi}$ es INVERSIBLE

$\Longrightarrow$ ϕ es una aplicación afín biyectiva que lleva puntos de una cónica a otra.

Ej: $0 = 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y + 2 = 5\left(x + \frac{3y}{5} - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{9y^2}{5} - \frac{4}{5} + \frac{12y}{5} + 5y^2 + 4y + 2$
(en R_c)

$= 5x'^2 + \frac{16}{5}y^2 + \frac{32}{5}y + \frac{6}{5} = 5x'^2 + \frac{16}{5}(y+1)^2 - 2 = 5x'^2 + \frac{16}{5}y'^2 - 2$

$x' = x + \frac{3y}{5} - \frac{2}{5}$, $y' = y+1$, $d_0 > 0$, $r = 3 \implies$ Elipse no degenerada

$$\implies x''^2 + y''^2 - 1 = 0, \begin{cases} x'' = \sqrt{\frac{5}{2}}\,x' = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{5}\right) \\ y'' = \sqrt{\frac{8}{5}}\,y' = \sqrt{\frac{8}{5}}\,(y+1) \end{cases}$$

$\varnothing : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$M_{R_c}(\varnothing) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5}{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} & \frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{2}} \\ \sqrt{\frac{8}{5}} & 0 & \sqrt{\frac{8}{5}} \end{array}\right)$$